Algebra en Meetkunde 2007/2008

H. Waalkens

Exam Problem Sheet

The exam consists of 7 problems. You can achieve 55 points in total.
The number of points for each problem is marked in brackets (you get 5 points for free).
You can find the translation of the problems into Dutch below.

1. **[6 Points.]** Let R be a ring. The **centre** of R is

$$Z(R) = \{a \in \mathbb{R} \,:\, \forall x \in R : ax = xa\}\,.$$

Prove that this is a subring of R.

2. **[8 Points.]** Let $\alpha = 1.3247\ldots$ be the real number which solves $\alpha^3 = \alpha + 1$. Prove that $\mathbb{Z}[\alpha] := \{a + b\alpha + c\alpha^2 \,:\, a, b, c \in \mathbb{Z}\}$ is a subring of $\mathbb{R}$, and $\alpha, \alpha - 1, \alpha^2 - 1, \alpha^3 - 1 \in \mathbb{Z}[\alpha]^*$.

3. **[6 Points.]** Let $R = \mathbb{Z}[X]$ and $I = (2, X) \subset R$. Prove that $X^2 + 4 \in I \cdot I$ and $X^2 + 4$ cannot be written in the form xy with $x, y \in I$. Conclude that $\{xy \,:\, x, y \in I\}$ is no ideal of R.

4. **[2+8 Points.]**

   (a) Let R be a commutative ring with 1. For $f \in R[X]$, give the formal definition of the derivative $f' \in R[X]$ of f.

   (b) Let $R = \mathbb{R}[X, Y]/(Y^2)$ and $h := Y + (Y^2) \in R$.

      i. Give reasons why each $r \in R$ can be written in the form $r = r_0 + r_1 h$ with uniquely determined $r_0, r_1 \in \mathbb{R}[X]$.

      ii. Let

$$\Phi_h : \mathbb{R}[X] \to R, \qquad \Phi_h(f) := f(X + h)$$

      be the evaluation homomorphism (for $a \in \mathbb{R} \subset \mathbb{R}[X]$, $\Phi_h(a) = a + 0 \cdot h$). Show that

$$\Phi_h(f) = f + f'h\,,$$

      where $f' \in \mathbb{R}[X]$ is the derivative of f.

      iii. Show that given $\Phi_h(fg) = \Phi_h(f)\Phi_h(g)$ one obtains the product rule for differentiation.

5. **[3+3 Points.]**

   (a) Give an example of an irreducible polynomial $f \in \mathbb{Z}[X]$ with the property that $f(X^2)$ is *not* irreducible.

   (b) Let $f \in \mathbb{Z}[X]$ be a monic Eisenstein polynomial. Show that $f(X^2)$ is irreducible in $\mathbb{Z}[X]$.

6. **[2+4 Points.]**
   (a) Give the definition of a unique factorization domain.
   (b) Let R be a unique factorization domain. Show that

   $$\cup_{n\geq 0} R[X_1, X_2, \ldots, X_n]$$

   is a unique factorization domain.

7. **[8 Points.]** Let R be the ring of finite-row matrices with coefficients in a field K. This means that every $r \in R$ is an infinite matrix $r = (r_{ij})$ with $i, j \in \mathbb{Z}_{>0}$ and for each i we have $r_{ij} \neq 0$ for only finitely many j.

   Addition and multiplication are defined analogously to the usual matrix operations:

   $$r + s = t \text{ with } t_{ij} := r_{ij} + s_{ij}\,, \qquad rs = u \text{ with } u_{ij} := \sum_{k=1}^{\infty} r_{ik} s_{kj}\,.$$

   Note that the sum is effectively finite, since only finitely many r_{ik}'s are different from zero.

   Define $b, c \in R$ as:

   $$\begin{aligned} b &:= (b_{ij})\,, \qquad b_{ij} = 1 \text{ if } j = 2(i-1)+1 \text{ and } b_{ij} = 0 \text{ else}\,, \\ c &:= (c_{ij})\,, \qquad c_{ij} = 1 \text{ if } j = 2(i-1)+2 \text{ and } c_{ij} = 0 \text{ else}\,, \end{aligned}$$

   where $i \in \mathbb{Z}_{>0}$. Show that the following R-modules are isomorphic:

   $$R \cong Rb \oplus Rc \cong R \oplus R\,.$$

Dutch Translation

1. **[6 Punten.]** Zij R een ring. Het **centrum** van R is

   $$Z(R) = \{a \in \mathbb{R} \,:\, \forall x \in R : ax = xa\}\,.$$

   Bewijs dat dit een deelring van R is.

2. **[8 Punten.]** Zij $\alpha = 1,3247\ldots$ het reële getal waarvoor geldt $\alpha^3 = \alpha + 1$. Bewijs dat $\mathbb{Z}[\alpha] := \{a + b\alpha + c\alpha^2 \,:\, a, b, c \in \mathbb{Z}\}$ een deelring van $\mathbb{R}$ is, en dat $\alpha, \alpha - 1, \alpha^2 - 1, \alpha^3 - 1 \in \mathbb{Z}[\alpha]^*$.

3. **[6 Punten.]** Zij $R = \mathbb{Z}[X]$ en $I = (2, X) \subset R$. Bewijs dat $X^2 + 4 \in I \cdot I$, maar dat $X^2 + 4$ niet geschreven kan worden als xy, met $x, y \in I$. Concluder dat $\{xy \,:\, x, y \in I\}$ geen ideal van R is.

4. **[2+8 Punten.]**
   (a) Zij R een commutatieve ring met 1. Voor $f \in R[X]$, geef de definitie van de afgeleide $f' \in R[X]$ van f.
   (b) Zij $R = \mathbb{R}[X, Y]/(Y^2)$ en zij $h := Y + (Y^2) \in R$.
      i. Ga na dat iedere $r \in R$ op unieke wijze to schrijven is als $r = r_0 + r_1 h$, met $r_0, r_1 \in \mathbb{R}[X]$.
      ii. Zij

      $$\Phi_h : \mathbb{R}[X] \to R, \qquad \Phi_h(f) := f(X + h)$$

      het evaluatiehomomorfisme (hierbij $\Phi_h(a) = a + 0 \cdot h$ voor alle $a \in \mathbb{R} \subset \mathbb{R}[X]$). Laat zien dat

      $$\Phi_h(f) = f + f'h$$

      met $f' \in \mathbb{R}[X]$ de afgeleide van f.

iii. Ga na dat uit $\Phi_h(fg) = \Phi_h(f)\Phi_h(g)$ volgt dat de produktregel voor differentiëren geldt.

5. **[3+3 Punten.]**

   (a) Vind een vorbeeld van een irreducibel polynoom $f \in \mathbb{Z}[X]$ met de eigenschap dat $f(X^2)$ *niet* irreducibel is.

   (b) Laat $f \in \mathbb{Z}[X]$ een monisch Eisensteinpolynoom zijn. Bewijs dat $f(X^2)$ irreducibel in $\mathbb{Z}[X]$ is.

6. **[2+4 Punten.]**

   (a) Geef de definitie van een ontbindingsdomein.

   (b) Zij R een ontbindingsdomein. Bewijs dat

   $$\cup_{n\geq 0} R[X_1, X_2, \ldots, X_n]$$

   een ontbindingsdomein is.

7. **[8 Punten.]** Zij R de ring van rij-eindige matrices met coëfficiënten in een lichaam K. Dat wil zeggen, iedere $r \in R$ is een oneindig grote matrix $r = (r_{ij})$ met $i, j \in \mathbb{Z}_{>0}$, waarbij voor elke i geldt, dat $r_{ij} \neq 0$ voor slechts eindig veel j.

   Optelling en product zijn analoog aan de gebruikelijke matrixoperaties:

   $$r + s = t \text{ met } t_{ij} := r_{ij} + s_{ij}\,, \qquad rs = u \text{ met } u_{ij} := \sum_{k=1}^{\infty} r_{ik}s_{kj}\,,$$

   merk op dat dit in feite een eindige som is, omdat slechts eindig veel r_{ik}'s ongelijk nul zijn.

   Definieer $b, c \in R$ door:

   $$\begin{array}{rcll} b & := & (b_{ij})\,, & b_{ij} = 1 \text{ als } j = 2(i-1)+1 \text{ en } b_{ij} = 0 \text{ anders}\,, \\ c & := & (c_{ij})\,, & c_{ij} = 1 \text{ als } j = 2(i-1)+2 \text{ en } c_{ij} = 0 \text{ anders}\,, \end{array}$$

   hierbij is $i \in \mathbb{Z}_{>0}$. Bewijs dat de volgende R-modulen isomorf zijn:

   $$R \cong Rb \oplus Rc \cong R \oplus R\,.$$